龙泉中学、宜昌一中 2021 届高三年级 2 月**数学试题**参考答案

一、单项选择题： 1-4　CDCA　　　5-8　BCAB

一、多项选择题： 9．BC　　10．BC　　11．BD　　12．ABD

三、填空题　13．$\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　14．$2\sqrt{10}$　　15．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　16．2π

四、解答题

17．解：（Ⅰ）由已知 $\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B+\sin A\sin C$，结合正弦定理，得 $a^2+c^2=b^2+ac$．

再由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，则 $B=\dfrac{\pi}{3}$．………………4 分

（Ⅱ）由 $B=\dfrac{\pi}{3},b=\sqrt{3}$，则由正弦定理，有

$2a-c=4\sin A-2\sin C=4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)-2\sin C=2\sqrt{3}\cos C$．………………………………7 分

因为 ΔABC 为锐角三角形，则 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$，则 $0<\cos C<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．………………………………9 分

所以 $2a-c$ 的取值范围为 $(0,3)$．…………………………………………………………………10 分

18．解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

由 $\begin{cases}4+d=2\cdot 2q-1\\4+2d=2\cdot q^2+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=4q-5\\d=q^2-1\end{cases}$ ……………………………………………………2 分

$\therefore q=2,d=3$……………………………………………………………………………………4 分

$\therefore a_n=3n+1,\ b_n=2^n$．…………………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 6 项时，令 $3n+1<2^7=128\Rightarrow n<\dfrac{127}{3}$

此时至多有 $41+7=48$ 项（不符）……………………………………………………………7 分

当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项时，令 $3n+1<2^8=256\Rightarrow n<85$

且 $2^2,\ 2^4,\ 2^6$ 是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项，则 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项且含有 $\{a_n\}$ 的前 56 项，再减去公共的三项…………………………………………………………………………9 分

$\therefore S_{60}=\left(56\times 4+\dfrac{56\times 55}{2}\times 3\right)+2+2^3+2^5+2^7=4844+170=5014$．……………………12 分

19．解：（Ⅰ）证明：取 AB 中点 D，连接 PD，DC

$\because PA=PB$，$AC=BC$，则 $AB\perp PD$，$AB\perp DC$．又 $PD\cap DC=D$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PDC，故 $AB\perp PC$．…………………………………………………………2 分

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}BC$，$\therefore BC\perp AC$．…………………………………………3 分

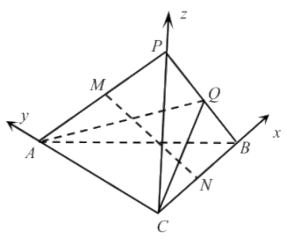
又 $\because$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且交线为 AC，$\therefore BC\perp$ 平面 ABC，故 $BC\perp PC$．　……….4 分

又 $AB\perp PC$，$AB\cap BC=B$ $\therefore PC\perp$ 平面 ABC．…………………………………………5 分

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系，设 $AC=1$，则 $A(0,1,0)$，$B(1,0,0)$，$P(0,0,1)$，

$Q\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，$M\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$．……………………………………………………6 分

设平面 QAC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\because \overrightarrow{CA}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{CQ}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，



由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0\end{cases}$，可得 $\vec{n}=(1,0,-1)$，……………………………………8 分

又 $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore \cos\langle\vec{n},\overrightarrow{MN}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………11 分

所以直线 MN 与平面 QAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．…………………………………………………………12 分

20．解：（Ⅰ）第三局甲当裁判则前两局有两种情形：前两场都是乙胜，前两场都是丙胜，故所求概率为 $P=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$．……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）由于不能连续两局都当裁判，第一局由甲当裁判，故 X 的可能取值为 0，1，2，………6 分

当 $X=0$ 时，则前三局乙均胜，故 $P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{2}{25}$，……………………………7 分

当 $X=2$ 时，乙只能在第 2、4 局中当裁判，故乙在第一局中输掉，在第三局中也输掉，则第一局丙胜乙败；第二局无论甲丙谁胜，在第三局中甲或丙是连胜概率变为 $\dfrac{2}{5}$，

故 $P(X=2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$，……………………………………………………………………9 分

$P(X=1)=1-\dfrac{2}{25}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{18}{25}$，……………………………………………………………………10 分

其分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{18}{25}$	$\dfrac{1}{5}$

$EX=0\times\dfrac{2}{25}+1\times\dfrac{18}{25}+2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{28}{25}$．……………………………………………………12 分

21．解：（Ⅰ）$y'=x$，设点 $A(2t,2t^2)(t>0)$，则 $k_{AM}=y'|_{x=t}=2t$，………………………2 分

$\therefore$ 直线 AM 的方程为：$y-2t^2=2t(x-2t)$，即 $y=2tx-2t^2$，

$\therefore M(t,0)$，又 $k_{OA}=t$，$\therefore k_{BC}=-\dfrac{1}{t}$，……………………………………………………4 分

$\therefore$ 直线 BC 的方程：$y=-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\dfrac{1}{t}x+1$ 经过定点 $(0,1)$．…………………………5 分

（Ⅱ）直线 BC 与抛物线 $x^2=2y$ 联立得 $x^2+\dfrac{2}{t}x-2=0$，………………………………………6 分

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{t}$，$x_1\cdot x_2=-2$，

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+y_1y_2=1+t^2\geq 5$

解得 $t\geqslant 2$，……………………………………………………………………………………8 分

$\because |AD|=\dfrac{\left|\dfrac{1}{t}\times 2t+2t^2-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}=\dfrac{|2t^2+1|}{\sqrt{t^2+1}}\cdot t$，……………………………………………………9 分

$|AO|=2\sqrt{t^2+t^4}=2t\sqrt{t^2+1}$，………………………………………………………………10 分

$\therefore |AD|\cdot|AO|=2t^2\dfrac{|2t^2+1|}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\sqrt{t^2+1}=2t^2(2t^2+1)\geqslant 72$，

当 $t=2$ 时，$(|AD|\cdot|AO|)_{\min}=72$．……………………………………………………12 分

22.解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{a}{x}-\ln x+1$ 得 $f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{a+x}{x^2}\ (x>0)$ …………………1 分

$\because$ 函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}-\ln x+1$ 有两个不同的零点 x_1,x_2 $\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调，

$\therefore a<0$，……………………………………………………………………………………2 分

令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<-a$，　$f'(x)<0$ 得 $x>-a$，

故 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递增，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递减，……………………………………3 分

则 $f(x)$ 的极大值为 $f(-a)=-\ln(-a)>0$，$\therefore 0<-a<1$ $\therefore -1<a<0$．

$\because x\to 0^+$ 时 $f(x)<0$，$x\to+\infty$ 时 $f(x)<0$，

$\therefore$ a 的取值范围是 $-1<a<0$．……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x_0)=-\ln(-a)$，$\because f(x_1)=f(x_2)$ $\therefore \dfrac{a}{x_1}-\ln x_1+1=\dfrac{a}{x_2}-\ln x_2+1$

$\therefore a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}}=\dfrac{\ln\dfrac{1}{x_2}-\ln\dfrac{1}{x_1}}{\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}}$．……………………………………………………………6 分

令 $\dfrac{1}{x_1}=t_1,\dfrac{1}{x_2}=t_2$，则 $a=\dfrac{\ln t_2-\ln t_1}{t_1-t_2}$，且 $\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}}{2}=\dfrac{t_1+t_2}{2}$，……………………………7 分

要证 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>2ef(x_0)$，只需证 $\dfrac{t_1+t_2}{2}>e(-\ln(-a))$．

下面先证明 $\dfrac{t_1+t_2}{2}>\dfrac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$，……………………………………………………………8 分

这只要证明 $\ln\dfrac{t_1}{t_2}<\dfrac{2(\dfrac{t_1}{t_2}-1)}{\dfrac{t_1}{t_2}+1}$，设 $0<\dfrac{t_1}{t_2}=m<1$，所以只要证明

$\ln m-\dfrac{2(m-1)}{m+1}<0$，设 $g(m)=\ln m-\dfrac{2(m-1)}{m+1}$，

则 $g'(m)=\dfrac{1}{m}-\dfrac{4}{(m+1)^2}=\dfrac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}\geq 0$，所以 $g(m)$ 递增，

则 $g(m)<g(1)=0$ 成立．于是得到 $\dfrac{t_1+t_2}{2}>\dfrac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}=-\dfrac{1}{a}$，…………………………10 分

因此只要证明 $-\dfrac{1}{a}\geq -e\ln(-a)\ (-1<a<0)$，构造函数 $h(a)=-\dfrac{1}{a}+e\ln(-a)$，

则 $h'(a)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{e}{a}=\dfrac{1+ea}{a^2}$，故 $h(a)$ 在 $(-1,-\dfrac{1}{e})$ 上递减，在 $(-\dfrac{1}{e},0)$ 上递增，

则 $h(a)\geq h(-\dfrac{1}{e})=0$，即 $-\dfrac{1}{a}\geq -e\ln(-a)$ 成立．…………………………………………12 分